代数幾何学シンポジウム記録
1990年度　pp.110-115

Fibrations with moving cuspidal singularities

奈良女 理　武田 好史（Yoshifumi Takeda）

k を代数閉体とする。V を k 上の非特異射影代数曲面、C を k 上の非特異代数曲線とし、$f : V \to C$ をファイブレーションとする。char $k = 0$ のときは f の一般ファイバーは非特異曲線となるが、char $k > 0$ のときは一般ファイバーが特異点を持つファイブレーションが存在することがしられている。さらにそれら特異点を持つファイブレーション(以下、カスピダルファイブレーションという)はしばしば次の例のように正標数における病理的現象をともなうことがある。

例1 (Raynaud). char $k = p > 0$ とする。このときファイブレーション $f : V \to C$ ですべてのファイバーが $x^p + y^2 = 0$ 型($p = 2$ のときは $x^2 + y^3 = 0$ 型)のカスプを持つ有理曲線であるものが存在する。さらに、V 上の豊富な可逆層 $\mathcal{L}$ で、$H^1(V, \mathcal{L}^{-1}) \neq 0$ となるものが存在する。

例2 (Russell, Kurke, W. Lang, ...). char $k = p \geq 3$ とする。このときファイブレーション $f : V \to C$ ですべてのファイバーが $x^p + y^{np-1} = 0\,(n \in \mathbf{N})$ 型のカスプを持つ有理曲線であるものが存在する。$(p, n) \neq (3, 1)$ のとき V は一般型曲面で、$H^0(V, \Theta_V) \neq 0$ である。ここに、Θ_V は V の接バンドルである。

本稿では、一般ファイバーが非特異であるようなファイブレーションを持つ曲面とその上の p-閉有理ベクトル場から構成されるカスピダルファイブレーションを調べることを目的とする。さらに、具体例として Raynaud 達の例を一般化した曲面を構成し、その上での小平の消滅定理の反例について考える。

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

§1 p-閉有理ベクトル場とカスピダルファイブレーション

以下、k は代数閉体とし標数は $p \geq 3$ とする。Z を k 上の非特異射影曲面とする。導分 $D \in \mathrm{Der}(k(Z))$ を Z 上の有理ベクトル場という。$D^p = hD$ となるような Z 上の有理関数 h が存在するとき D は p-閉であるという。スキーム Z^D を Z と同じ位相空間を持ち、構造層は $\mathcal{O}_{V^D} = \mathcal{O}_V \cap k(Z)^D$ であるように定義し、Z の D による商曲面と呼ぶ。ここに、$k(Z)^D = \{h \in k(Z) \mid D(h) = 0\}$ である。このとき、商曲面 Z^D は正規であり、自然な射影 $\pi : Z \to Z^D$ が存在し、π は純非分離射である。さらに、$\deg \pi = p$ であることと D が p-閉であることは同値である。今後、p-閉なベクトル場 Dを考えることにする。Z 上の点 P とその近傍での座標系 (x, y) をとると、

$$D = h_P \big(f_P \frac{\partial}{\partial x} + g_P \frac{\partial}{\partial y}\big)$$

と書ける。ここに、$h_P \in h(Z)$ で $f_P, g_P \in \mathcal{O}_{Z,P}$(互いに素) である。イデアル (f_P, g_P) が 1 を含むときかつそのときにかぎり、Z^D は $\pi(P)$ で非特異であることが知られている。$\{h_P\}_{P \in Z}$ できまる Z 上の因子を D の因子といい (D) と表す。B を k 上の非特異曲線とし、$\varphi : Z \to B$ を一般ファイバーが非特異曲線であるようなファイブレーションで $k(B) \not\subset k(Z)^D$ となっているものを考える。Z の D による商曲面を X とし、k-Frobenius 射 $\mathbf{F}_B : B \to B'$ を取る。このとき、射$\psi : X \to B'$ が存在し、一般ファイバーが既約で被約な曲線となる。以下、ファイブレーション$\psi : X \to B'$ の様子を調べる。

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ B & \xrightarrow[\mathbf{F}_B]{} & B' \end{array}$$

まず、有理ベクトル場 D を $\Theta_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}(-(D))$ の切断とみることができるから、単射 $\mathcal{O}((D)) \to \Theta_Z$ が存在することがわかる。自然な射 $\Theta_Z \to \varphi^* \Theta_B$ との合成射 $\mathcal{O}((D)) \to \varphi^* \Theta_B$ を考える。$k(B) \not\subset k(Z)^D$ という仮定からこの合成射は単射

であることがわかる。余核を $\mathcal{R}$ とすると完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}((D)) \longrightarrow \varphi^*\Theta_B \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow 0$$

が得られる。$\otimes\mathcal{O}(\varphi^*K_B)$ を作用させると、

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}((D)+\varphi^*K_B) \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{R}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{O}(\varphi^*K_B) \longrightarrow 0$$

となる。Supp $\mathcal{R}$ の既約成分への分解 Supp $\mathcal{R} = T_1 + \cdots + T_r + \ell_1 + \cdots + \ell_s$ を考える。ここで、各 T_i は φ に関しての水平成分であり、ℓ_j はファイバーに含まれる成分である。上記の完全列より自然数 $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ が存在して、因子 $a_1T_1 + \cdots + a_rT_r + b_1\ell_1 + \cdots + b_r\ell_r$ が $-(D) - \varphi^*K_B$ に線型同値となることがわかる。この因子を D の φ による接跡といい、$a_1T_1 + \cdots + a_rT_r$ を接跡の水平成分という。つぎの基本的な定理が成立する。

定理1．上記の仮定及び記号のもとで次のことが成立する。

(1) $\psi : X \to B'$ はファイブレーションで、一般ファイバーの算術種数は $p_a(F) - (p-1)(F,D)/2$ である。ここに、F は φ の一般ファイバーである。

(2) ψ のファイバーの特異跡 (すなわち、*moving singularities*) は T_i の π による像全体に一致する。

(3) G を ψ の一般ファイバーとし、Q を G 上の点とする。$Q \in \pi(T_i)$ で T_i が B 上分離的かつ $a_i \not\equiv p-1\,(\mathrm{mod}\ p)$ であるとき、G は Q において、$x^p + y^{a_i+1} = 0$ 型のカスプを持つ。

最後に、有理ベクトル場とファイブレーションの切断との関係を述べる。C を Z 上の曲線とし、点 P の近傍で $u_p = 0$ で定義されているとする。C が D の積分曲線であるとは、C 上のすべての点 P に対して、$(1/h_p)D_P(u_p) \equiv 0 \mod (u_p)$ が成立するときにいう。ここで、h_p は因子 (D) の P の近傍での定義式である。φ の切断 S が D の積分曲線であるとき、S の π による像は ψ の切断となることが知られている。

§2 一般化された Raynaud 曲面

最初に、一般化された丹後曲線の定義をする。C を k 上の非特異射影曲線とし、$\mathcal{N}$ を次数が正である C 上の可逆層とする。切断 $\{\zeta_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_C)\}_{i\in I}$ が $\mathcal{O}_{U_i}\mathrm{d}\zeta_i = \omega_C|_{U_i}, \mathrm{d}\zeta_i = a_{ij}{}^{np}\mathrm{d}\zeta_j$ であるようにとれるとする。ここで、$\{a_{ij}\}$ は $\mathcal{N}$ のアフィン開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ についての変換関数であり、n は $n \not\equiv 0 \pmod p, n > 1$ である自然数である。このとき、$(C, \mathcal{N}, \{\mathrm{d}\zeta_i\})$ を指数 n の一般化された丹後曲線と呼ぶ。

例3．C を $y^{np} - y = x^{np-1}$ で定義された平面曲線とする。ここで、n は $n \not\equiv 0 \pmod p, n > 1$ である自然数である。P_∞ を C の無限遠点としたとき、$(C, \mathcal{O}_c((np-3)P_\infty), \mathrm{d}x)$ は指数 n の一般化された丹後曲線である。

次に、一般化された Raynaud 曲面を構成する。$(B', \mathcal{N}, \{\mathrm{d}\eta_i\})$ を指数 n の一般化された丹後曲線とする。k-Frobenius 射 $\mathbf{F}_B : B \to B'$ を取る。B 上の階数2のベクトルバンドル $\mathcal{E} = \mathcal{O}_B \oplus \mathbf{F}_B^*\mathcal{N}$ をとり、$\mathbf{P}^1$-ファイブレーション $\varphi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) = Z \to B$ を考える。φ の2つの切断 S, T を

$$\mathcal{O}_S(S) \cong \mathbf{F}_B^*\mathcal{N}, \quad \mathcal{O}_T(T) \cong \mathbf{F}_B^*\mathcal{N}^{-1}$$

となるようにとる。φ のファイバー F_0 を1つとり、$\{P\} = F_0 \cap T$ とする。P での局所座標系 (z_0, ξ_0) を $T = \{z_0 = 0\}, F_0 = \{\xi_0 = 0\}$ となるようにとる。Z 上の p-閉有理ベクトル場

$$D = \frac{\partial}{\partial z_0} + n z_0^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_0}$$

を考える。このとき、$\mathcal{O}_Z((D)) = \mathcal{O}_Z(-(n-1)S) \otimes \varphi^* \circ \mathbf{F}_B^*\mathcal{N}^{-1}$ であり、D の接跡は $(n-1)T$ であり、切断 S は D の積分曲線であることがわかる。$X = Z^D$ とおくと次のことが成立する。

(1) X は非特異極小曲面である。

(2) ファイバーの算術種数が $(p-1)(n-1)/2$ であるようなファイブレーション $\psi : X \to B'$ が存在する。

(3) ψ のすべてのファイバーは $x^p + y^n = 0$ 型のカスプを持つ有理曲線である。

(4) ファイバーのカスプの跡は $\pi(T)$ に一致する。

(5) $E = \pi(S)$ は ψ の切断であり、$\mathcal{O}_E(E) \cong \mathcal{N}$ である。

X を $(B', \mathcal{N}, \{d\eta_i\})$ 上の一般化された Raynaud 曲面と呼ぶ。X のいくつかの不変量を次にあげる。

$$\begin{aligned}
\omega_X &= \mathcal{O}_X((np - p - n - 1)E) \otimes \psi^* \mathcal{N}^{p+n} \\
(K_X^2) &= (n^2p^2 - p^2 - n^2 - 4np + 1)d \\
\mathrm{e}(X) &= -2npd \\
\chi(\mathcal{O}_X) &= \frac{1}{12}(n^2p^2 - p^2 - n^2 - 6np + 1)d.
\end{aligned}$$

ただし、$\mathrm{e}(X)$ は X の Euler 数であり、$d = \deg \mathcal{N}$ である。

さて、小平の消滅定理に関して次の定理が知られている。

定理２．$f : V \to C$ を非特異射影曲面 V から非特異射影曲線 C へのファイブレーションとし、すべてのファイバーが既約かつ被約であり正の算術種数を持つとする。さらに、f は自己交点数が正である切断 Γ を持つとする。このとき次のことが成立する。

(1) $\mathcal{O}_V(\Gamma) \otimes f^*\mathcal{L}$ は豊富である。ここで、$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_\Gamma(\Gamma)$ 。

(2) $H^1(V, \mathcal{O}(-\Gamma) \otimes f^*\mathcal{L}^{-1}) \neq 0$ 。

$\psi : X \to B'$ は定理の仮定を満たしているから、$\mathcal{O}(E) \otimes \psi^*\mathcal{N}$ は豊富で、$H^1(X, \mathcal{O}(-E) \otimes \psi^*\mathcal{N}^{-1}) \neq 0$ であることがわかる。コホモロジー群に関しては、より詳しく次の評価式が成り立つ。

定理３．(1) $n \geq p + 1$ のとき、

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}(-E) \otimes \psi^*\mathcal{N}^{-1}) \geq \dim H^0(B', \mathcal{N}^{n-p-1}).$$

(2) $2 \leq n \leq p - 1$ のとき、

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}(-E) \otimes \psi^*\mathcal{N}^{-1}) \geq \dim H^0(B', \mathcal{N}^{2n-p-1}).$$

証明は X を Z の k-Frobenius 射の像 Z' の p-次純非分離被覆とみることによりなされる。

最後に、次の例を考える。

例4．$(B', \mathcal{N}, \{d\eta_i\})$ として例3の指数 n の一般化された丹後曲線をとり、X をその上の一般化された Raynaud 曲面とする。B' を $\mathbf{P}^1$ 上の np 次被覆 $\varpi : B' \to \mathbf{P}^1$ で無限遠点上全分岐したものと考える。$\mathcal{N} = \mathcal{O}_B((np-3)P_\infty)$ であったから、$(n-p-1)(np-3) \geq rnp$ のとき、$\varpi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(r) \subset \mathcal{N}^{n-p-1}$ となり、$\dim H^0(B', \mathcal{N}^{n-p-1}) \geq \dim H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(r))$ が成立する。$\lim_{n\to\infty}(n-p-1)(np-3)/np = \infty$ と $\lim_{r\to\infty} \dim H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(r)) = \infty$ に注意すれば、$\lim_{n\to\infty} \dim H^0(B', \mathcal{N}^{n-p-1}) = \infty$ がわかる。従って前定理より、可逆層 $\mathcal{O}(E) \otimes \psi^*\mathcal{N}$ は n に関係なく常に豊富であるが、

$$\lim_{n\to\infty} \dim H^1(X, \mathcal{O}(-E) \otimes \psi^*\mathcal{N}^{-1}) = \infty$$

が成立する。

文献

Y. Takeda, Fibrations with moving cuspidal singularities, to appear in Nagoya Math. J..